Esercitazione 6

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023

3 Aprile 2023

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Usare lo sviluppo di Laplace rispetto all'ultima riga per dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti matrici determinare l'inversa usando i cofattori:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia I_n la matrice identità con lo stesso numero di righe e colonne. Dimostrare che le seguenti matrici a blocchi

$$\begin{pmatrix} I & \star \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & \star \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \star & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \star & I \end{pmatrix}$$

hanno tutte determinante uguale a $\det A$ (e $\star$ è una qualunque matrice quadrata $n \times n$).

Esercizio 5. Discutere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer per la risoluzione:

$$\begin{cases} kX_1 + X_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + X_2 - kX_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6. Siano $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, tre punti nel piano $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che l'area del triangolo con vertici P_1, P_2, P_3 è uguale al valore assoluto di

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 7 (Determinante della matrice di Vandermonde)**.** Dati $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_j - x_i)$$

Suggerimento: considerare il polinomio $p(t) = \prod_{j=0}^{n-1}(t - x_j)$ e una matrice con lo stesso determinante della matrice di Vandermonde ma con una riga data dalle valutazioni $p(x_0), \ldots, p(x_n)$.