Esercitazione 9

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023

8–10 Maggio 2023

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$S = \{(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 3 = 2x_2 - x_1 = 0\}$$

1. Desrcivere S e determinare la sua giacitura;
2. Trovare un punto $P \in S$ e un punto $Q \notin S$;
3. Se possibile, trovare un piano π_1 che contiene S;
4. Se possible, trovare un piano π_2 che incontra S in un punto;
5. Se possibile, trovare un piano π_3 disgiunto da S;
6. Se possibile, trovare una retta r_1 che incontra S in esattamente un punto;
7. Se possibile, trovare una retta r_2 disgiunta da r_2.

Esercizio 2. Siano $P = (3, 2, 1)$, sia $W \subset \mathbb{R}^3$, il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$, e sia $S = \mathcal{S}_{P,W}$ il sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(a) Determinare giacitura e dimensione di S;

(b) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S;

(c) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della giacitura di S;

(d) Stabilire se $Q \in S$;

(e) Determinare $S \cap \mathcal{S}_{Q,W}$;

(f) Sia T il sottospazio affine di equazioni cartesiane $x_1 - x_0 = x_3 + x_1 + 2 = 0$. Determinare $S \cap T$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^5$:

$$S := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + 3 = x_2 - x_1 - 2 = 2x_1 + 1 = 0\}.$$

(a) Determinare dimensione, giacitura e equazioni parametriche di S;

(b) Per ognuna delle seguenti condizioni trovare un piano π in $\mathbb{A}^5$ che le soddisfa, o argomentare perchè tale piano non esiste:

[1] π contiene S;

[2] $\pi \cap S$ consiste di un solo punto;

[3] π è disgiunto da S;

[4] π è contenuto in S;

[5] $\pi \cap S$ consiste di una retta;

[6] π è parallelo a S.

(c) Per ognuna delle seguenti condizioni trovare una retta r in $\mathbb{A}^5$ che le soddisfa, o argomentare perchè tale retta non esiste:

[1] r contiene S;

[2] $r \cap S$ consiste di un solo punto;

[3] r è disgiunta da S;

[4] r è contenuta in S;

[5] r è parallela a S.

(d) Per ognuna delle seguenti condizioni trovare un iperpiano T in $\mathbb{A}^5$ che le soddisfa, o argomentare perchè tale piano non esiste:

[1] T contiene S;

[2] $T \cap S$ consiste di un solo punto;

[3] T è disgiunto da S;

[4] T è contenuto in S;

[5] $T \cap S$ consiste di una retta;

[6] T è parallelo a S.

[7] $T \cap S$ consiste di una piano.

Esercizio 4. Sia data, in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta r di equazioni parametriche (con $t \in \mathbb{R}$)

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Determinare due sottospazi affini di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la cui intersezione è r.

Esercizio 5. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimension 4 con riferimento affine $\{0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e coordinate X, Y, Z, W. Siano r_k la retta passante per il punto $Q(1,1,1,0)$ e parallela al vettore $v = e_1 + e_2 - ke_4$, e T_k il sottospazio affine con le seguenti equazioni:

$$T_k = \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X + Y + kZ = 0 \\ Z - W = k. \end{cases}$$

1. Determinare i valori di k per i quali T_k e $r_k \cap T_k$ sono sottospazi affini di $\mathbb{A}$ e calcolare la dimensione di T_k;

2. Determinare per quali valori di k, se esistono, r_k è parallela a T_k;
3. Determiare per quali valori di k, se esistono, esiste un piano π di $\mathbb{A}$ tale che p è parallelo a T_k ed a r_k.